Functietheorie 20-3-97

Tentamenopgave

I 1. Zij $\alpha \in \mathbb{C}$ met $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$. Toon aan dat $\mathrm{Re}(\frac{1}{\alpha}) > 0$.

2. Zij $P(z) = c(z-\alpha_1)\ldots(z-\alpha_n)$ een polynoom van de graad $n \geq 1$ met wortels α_k (niet noodzakelijk verschillend). Toon aan dat als $\mathrm{Re}(\alpha_k) < 0$ voor alle k, de wortels van de afgeleide P' eveneens strikt negatieve reële delen hebben. Aanwijzing: Beschouw de logarithmische afgeleide

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z - \alpha_k}$$

en toon aan dat bij $\mathrm{Re}(z) \geq 0$ het reële deel hiervan strikt positief is.

II 1. Formuleer de residu-stelling.

2. a. Bereken de residuen in de polen van de functie $\tan(\pi z)$.

b. Zij Γ_n de positief geörienteerde cirkel met straal $n \in \mathbb{N}$. Bereken de contour-integraal

$$\int_{\Gamma_n} \tan(\pi z)dz.$$

3. Bereken de integraal

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx$$

III We herinneren eraan dat

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}; \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$$

Toon aan dat $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ voor alle $z \in \mathbb{C}$.

IV 1. Zij $D(a,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < r\}$. Zij $f : D(a,r) \longrightarrow D(f(a), R)$ holomorf. Bewijs de volgende generalisatie van het Lemma van Schwarz:

$$|f(z+a) - f(a)| \leq \frac{R}{r}|z| \text{ voor alle } z \text{ met } |z| < r$$

2. Leid hier de stelling van Liouville uit af.

V Beschouw de functie

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

1. Toon aan dat voor alle $\alpha > 1$ de reeks uniform convergeert voor $\mathrm{Re}(z) > \alpha$.

2. Toon aan dat ζ een holomorfe functie is in het halfvlak $\mathrm{Re}(z) > 1$.